

## Versuchsanleitung M 4 : Dynamische Viskosität

### 1 Einleitung

Alle Strömungen realer Flüssigkeiten und Gase sind durch das Auftreten bewegungshemmender Kräfte (Reibungskräfte, Widerstandskräfte) gekennzeichnet.

Das Aufrechterhalten der Strömung erfordert eine Arbeitsverrichtung gegen diese Kräfte. Ein Teil dieser Arbeit wird von den inneren Reibungskräften verbraucht, den anderen Teil nimmt die kinetische Energie der Wirbel auf.

Beim Massentransport durch Rohrleitungen ist diese Arbeit z. B. von Pumpen aufzubringen und bei der Bewegung von Autos, Schiffen oder Flugzeugen wird sie von den Antriebsaggregaten verrichtet.

Das Verhältnis von kinetischer Energie zu Reibungsarbeit heißt REYNOLDSzahl  $Re$  (nach OSBORNE REYNOLDS, 1842-1912) und kennzeichnet den Strömungszustand.

Bei kleinen REYNOLDSzahlen ist die Strömung laminar. Das Medium strömt in Schichten, die wie Blätter (lat.: laminae) geordnet sind und sich nicht vermischen.

Bei großen REYNOLDSzahlen wird die Strömung turbulent (lat.: stürmisch). Die Volumenelemente des Mediums bewegen sich auf verschlungenen Bahnen und es kommt zur Wirbelbildung.

Die REYNOLDSzahl hängt u. a. von einer materialspezifischen Größe des strömenden Mediums, seiner Zähigkeit oder dynamischen Viskosität  $\eta$ , ab.

Die experimentelle Bestimmung der dynamischen Viskosität erfolgt durch die Untersuchung definierter Strömungsvorgänge. Im vorliegenden Versuch wird die STOKESSche Kugelfallanordnung (nach GEORGE GABRIEL STOKES, 1819-1903) verwendet.

Die Kugelfallmethode hat den Vorteil, dass der Messvorgang gut zu beobachten ist, alle Größen leicht messbar und die zur Versuchsauswertung nötigen Beziehungen übersichtlich sind. Die Kugelfallmethode besitzt jedoch auch Nachteile. Das relativ große Volumen der Probenflüssigkeit lässt sich schlecht temperieren. Der Messbereich für  $\eta$  ist klein und die Messgenauigkeit nicht sehr hoch. Für genauere Messungen werden daher andere Viskosimeter verwendet.

### 2 Grundlagen

Zur Definition der dynamischen Viskosität  $\eta$  wird eine laminare Strömung ebener Schichten betrachtet, wobei die Geschwindigkeit  $v$  der Schichten in der zu den Schichten senkrechten Richtung  $n$  veränderlich ist.

Gemäß dem NEWTONschen Reibungsgesetz (nach ISAAC NEWTON, 1643-1727)

$$F_R = \eta A \left| \frac{dv}{dn} \right| \quad (2-1)$$

ist die Reibungskraft  $F_R$  der Berührungsfläche  $A$  der Schichten und dem Betrag des sogenannten Geschwindigkeitsgefälles  $\frac{dv}{dn}$  proportional. Der Proportionalitätsfaktor ist die bereits erwähnte dynamische Viskosität  $\eta$ . Sie wird in  $\text{Pa s} = \text{N s m}^{-2} = \text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$  gemessen.

Der Quotient  $\nu = \frac{\eta}{\rho_F}$  aus der dynamischen Viskosität  $\eta$  und der Dichte  $\rho_F$  der Flüssigkeit heißt kinematische

Viskosität  $\nu$  und wird in  $\text{m}^2/\text{s}$  gemessen.

Bei sogenannten NEWTONschen Flüssigkeiten hängt  $\eta$  nur vom Druck und (sehr stark) von der Temperatur ab. Bei nichtNEWTONschen Flüssigkeiten hängt  $\eta$  auch noch von dem Geschwindigkeitsgefälle und den im Medium herrschenden Schubspannungen ab (Strukturviskosität).

In Gleichung (2-1) ist  $F_R$  eine Kraft, die eine Flüssigkeitsschicht auf eine andere ausübt. Diese Kraft kann man natürlich nicht messen, um etwa damit die dynamische Viskosität aus (2-1) zu bestimmen.

Man kann jedoch (2-1) auf bestimmte, geometrisch einfache Strömungsformen anwenden und daraus messtechnisch überprüfbare Folgerungen herleiten.

Von STOKES wurde die durch innere Reibung verursachte Kraft  $\vec{F}_R$  berechnet, die eine Kugel vom Radius  $r$  erfährt, wenn sie sich mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  durch eine unendlich ausgedehnte NEWTONsche Flüssigkeit der dynamischen Viskosität  $\eta$  bewegt. Sie lautet

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta r \vec{v} \quad . \quad (2-2)$$

Die Gleichung (2-2) gilt nur für laminare Strömungen mit REYNOLDSzahlen

$$Re = \frac{\rho_F v r}{\eta} = \frac{v r}{\nu} \ll 1 \quad , \quad (2-3)$$

das wurde von STOKES bei der Herleitung vorausgesetzt.

Für den Strömungswiderstand  $F_W$  turbulent umströmter Körper macht man den Ansatz

$$F_W = c_W \frac{\rho_F}{2} v^2 A \quad . \quad (2-4)$$

Dabei steht  $\frac{\rho_F}{2} v^2$  für die Differenz der statischen Drücke vor und hinter dem Körper und  $A$  ist seine Stirnfläche.

Der dimensionslose Proportionalitätsfaktor  $c_W$  heißt Widerstandsbeiwert und wird experimentell oder (seltener) theoretisch bestimmt.

Übernimmt man den Ansatz (2-4) für die laminare Umströmung der Kugel und berücksichtigt, dass eine Kugel vom Radius  $r$  die Stirnfläche  $\pi r^2$  aufweist, so folgt aus (2-2) und (2-4)

$$6\pi\eta r v = F_R = F_W = c_W \frac{\rho_F}{2} v^2 \pi r^2 \quad (2-5)$$

bzw.

$$c_W = \frac{12\eta}{\rho_F v r} = \frac{12}{Re} = \frac{12\nu}{v r} \quad . \quad (2-6)$$

Die Gleichung (2-6) gilt für kleine REYNOLDSzahlen (näherungsweise) bis  $Re = 1$ . Nach einem Übergangsbereich beginnt bei  $Re \approx 10^3$  der turbulente Bereich, in dem  $c_W$  nur noch sehr wenig von  $Re$  abhängt.

### 3 Versuchsanordnung

Ein Standzylinder ist mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, deren Temperatur mit einem Thermometer und deren Dichte  $\rho_F$  mit einem Aräometer gemessen werden. Durch eine Öffnung in der Mitte des Deckels gibt man kleine Kugeln, deren Radius  $r$  und Dichte  $\rho_K$  vorher bestimmt wurden, in die Flüssigkeit. Die Kugeln sinken zum Boden des Gefäßes. Bewegt sich die Kugel mit der Geschwindigkeit  $v$  in der Flüssigkeit, so unterliegt sie der Einwirkung der Schwerkraft  $F_G$ , der Auftriebskraft  $F_A$  und nach (2-2) der Reibungskraft  $F_R$ .

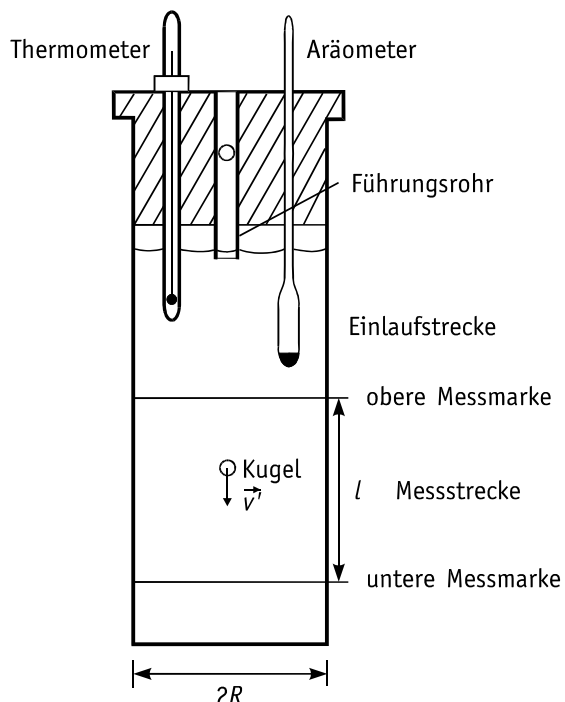


Bild 1 Kugelfallanordnung nach STOKES

Bezüglich einer nach unten gerichteten  $x$ -Achse lautet die NEWTONsche Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x} = F_{Gx} + F_{Ax} + F_{Rx} = F_G - F_A - F_R \quad . \quad (3-1)$$

Mit  $F_G = m_G g = V_{\text{Kugel}} \rho_K g$ ,  $F_A = m_F g = V_{\text{Kugel}} \rho_F g$ ,  $V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3} \pi r^3$  und (2-2) folgt

$$m \ddot{x} = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_K - \rho_F) g - 6 \pi \eta r \dot{x} \quad . \quad (3-2)$$

Für  $\dot{x} = v$ ,  $\ddot{x} = \dot{v}$  und mit der Anfangsbedingung  $\dot{x}(0) = v(0) = 0$  hat die Differentialgleichung (3-2) die Lösung

$$v(t) = v_e \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (3-3)$$

mit der Endgeschwindigkeit

$$v_e = \frac{2(\rho_K - \rho_F) g r^2}{9 \eta} \quad (3-4)$$

und der Zeitkonstanten

$$\tau = \frac{2 r^2 \rho_K}{9 \eta} \quad . \quad (3-5)$$

Nach einer Zeit  $t' = 5 \tau$  ist in (3-3) die Exponentialfunktion kleiner als 0,01 und die Endgeschwindigkeit  $v_e$  (praktisch) erreicht. Die Kugel legt von 0 bis  $t'$  eine Strecke zurück, die sicher kleiner als  $5 \tau v_e$  ist. Ist also die Einlaufstrecke  $e > 5 \tau v_e$  (und das wurde bei der Dimensionierung des Versuches beachtet), dann ist auf der Messstrecke  $l$  die Geschwindigkeit  $v'$  der Kugel konstant. Man misst die Sinkzeit  $t$  der Kugel zwischen den Messmarken und berechnet  $v' = \frac{l}{t}$ . Diese gemessene Geschwindigkeit  $v'$  weicht systematisch von  $v_e$  ab, weil das Flüssigkeitsvolumen natürlich nicht - wie bei der Berechnung von  $v_e$  vorausgesetzt - unendlich ausgedehnt sein kann. Den größten Einfluss übt der endliche Rohrradius  $R$  aus. Deshalb ist  $v' < v_e$  und man korrigiert den Messwert mit einem empirischen Korrekturterm

$$v_e = v' \left( 1 + 2,1 \frac{r}{R} \right) \quad . \quad (3-6)$$

Ist (im ausgedehnten Medium)  $v = v_e = \text{const}$ , so ist  $\dot{v} = \ddot{x} = 0$  und aus (3-2) folgt mit (2-5)

$$6 \pi \eta r v_e = \frac{4}{3} \pi r^3 (\rho_K - \rho_F) g = c_W \frac{\rho_F}{2} v_e^2 \pi r^2 \quad . \quad (3-7)$$

Daraus kann

$$c_W = \frac{8}{3} g \frac{\rho_K - \rho_F}{\rho_F} \frac{r}{v_e^2} \quad (3-8)$$

berechnet werden.

Stellt man den Logarithmus von  $c_W$  über dem Logarithmus von  $\frac{r v_e}{\text{cm}^2 \text{s}^{-1}}$  dar, so erhält man nach (2-6) eine

Gerade

$$\lg c_W = \lg \left( \frac{12 v}{\text{cm}^2 \text{s}^{-1}} \right) - \lg \left( \frac{r v_e}{\text{cm}^2 \text{s}^{-1}} \right) \quad . \quad (3-9)$$

Die Viskosität  $\eta$  (und daraus  $v$ ) berechnet man nach Gleichsetzen von (3-4) und (3-6) aus

$$\eta = \frac{2(\rho_K - \rho_F) g r^2 t}{9 l \left( 1 + 2,1 \frac{r}{R} \right)} \quad (3-10)$$

mit den Werten einer der untersuchten Kugeln.

#### 4 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt. Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

- 4.1 Messen Sie die Durchmesser mehrerer am Versuchsplatz befindlichen Kugeln. Die Dichten der Kugeln sind am Arbeitsplatz angegeben. Messen Sie die Längen der Messstrecke  $l$  und der Einlaufstrecke  $e$  sowie Dichte und Temperatur der Versuchsflüssigkeit.
- 4.2 Messen Sie die Sinkgeschwindigkeiten aller Kugeln und korrigieren Sie diese für ein unendlich ausgedehntes Gefäß. Berechnen Sie für alle Kugeln  $c_W$  und  $r v_e$ . Fertigen Sie ein Diagramm mit der Geraden (3-9) an und überprüfen Sie deren Anstieg.
- 4.3 Berechnen Sie für eine ausgewählte Kugel die dynamischen Viskosität  $\eta$  (nebst Fehler) und die kinematische Viskosität  $\nu$  (ohne Fehlerbetrachtung).
- 4.4 Überprüfen Sie anhand der Einlaufstrecke und der REYNOLDSzahl, ob die Versuchsanordnung bezüglich der Messstrecke die Bedingungen konstanter Geschwindigkeit und laminarer Strömung erfüllt.

#### 5 Fragen

- 5.1 Erklären Sie die Begriffe "laminare Strömung" und "turbulente Strömung".
- 5.2 Stellen Sie für die sinkende Kugel die vektorielle Bewegungsgleichung auf und geben Sie deren Projektion auf eine senkrecht nach unten gerichtete  $x$ -Achse an.
- 5.3 Erläutern Sie das NEWTONsche Reibungsgesetz (mit Skizze).
- 5.4 Skizzieren Sie die Funktion  $v(t) = v_{\text{end}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$  der Kugel und tragen Sie die Zeitkonstante  $\tau$  in die Skizze ein.
- 5.5 Welche Bedeutung besitzt die REYNOLDSzahl  $Re$  einer Strömung? Wie lautet sie für die umströmte Kugel?
- 5.6 Die Zeitkonstante  $\tau$  der Funktion  $v(t)$  [siehe Frage 4] sei bekannt. Zu welcher Zeit  $t'$  erreicht dann  $v(t)$  die Endgeschwindigkeit zu 99 %?
- 5.7 Die Viskosität wird aus der Gleichung  $\eta = \frac{2(\rho_K - \rho_F)gr^2}{9v_e}$  berechnet. Geben Sie eine Fehlerformel für  $\eta$  an, wenn alle Größen fehlerbehaftet sind.
- 5.8 Die Sinkgeschwindigkeit  $v(t) = \frac{dx}{dt}$  sei gegeben [siehe Frage 4]. Berechnen Sie die Ort-Zeit-Funktion  $x(t)$ , wenn  $x(t=0) = 0$  ist.
- 5.9 Lösen Sie die Bewegungsgleichung der Kugel für den Fall bereits konstanter Sinkgeschwindigkeit und berechnen Sie diese.
- 5.10 Glaskugeln ( $r = 2 \text{ mm}$ ,  $\rho_K = 2,50 \text{ g cm}^{-3}$ ) sinken in Öl ( $\rho_F = 0,98 \text{ g cm}^{-3}$ ). Wie groß muss die dynamische Viskosität mindestens sein, damit  $Re < 0,1$  bleibt?

#### Literatur

- |       |                      |  |
|-------|----------------------|--|
| [ 1 ] | Geschke, D. (Hrsg.): | Physikalisches Praktikum<br>Teubner-Verlag, Leipzig, 2001<br>ISBN 3-519-10206-4                        |
| [ 2 ] | Hering, E. u. a.:    | Physik für Ingenieure<br>Springer-Verlag, Berlin, 2004<br>ISBN 3-540-21036-9                           |
| [ 3 ] | Kalide, W.:          | Einführung in die Technische Strömungslehre<br>Verlag Carl Hanser, München, 1990<br>ISBN 3-446-15892-8 |