

## Versuchsanleitung S 5 : Koppelschwingungen

### 1 Einleitung

In diesem Versuch lernen Sie ein mechanisches Modell für die gekoppelte ungestörte Schwingung zweier linearer, harmonischer und (näherungsweise) ungedämpfter Oszillatoren kennen. Realisiert wird das Modell durch zwei physikalische Pendel, deren Bewegungen über eine Feder miteinander gekoppelt sind. Dieser Versuch soll folgende Erkenntnisse vermitteln bzw. vertiefen :

- Für die Beschreibung der Bewegung eines Systems von zwei starren Körpern hat man für jeden Körper eine Bewegungsgleichung nach dem Grundgesetz der Mechanik aufzuschreiben. Dabei sind die Wechselwirkungskräfte einzubeziehen, die von dem Partner im System auf den gerade betrachteten Körper ausgeübt werden und die vom Bewegungszustand dieses Partners abhängen.
- Aus dem System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen, das man so erhält, kann man eine Differentialgleichung vierter Ordnung für jede der Pendelkoordinaten einzeln gewinnen und sie nach üblichen Verfahren lösen.
- Bei schwacher Kopplung der beiden Oszillatoren beschreiben diese eine als Schwebung bezeichnete Bewegung, deren Untersuchung Aussagen über das Kopplungselement ermöglicht.

### 2 Grundlagen

Im Versuch wird die in Bild 1 skizzierte Anordnung zweier physikalischer Pendel verwendet. Die Pendel sollen gerade die Auslenkungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  besitzen. Beide Pendel sind von gleicher Beschaffenheit und bestehen aus je einer Masse  $m'$  an einem Stab der Masse  $m''$ . Die Gewichtskraft  $m\vec{g}$  der Gesamtmasse  $m = m' + m''$  greift im Schwerpunkt  $S$  an. Die mittlere Feder ( Federkonstante  $k$ ) koppelt die Bewegung des einen mit der des anderen Pendels.

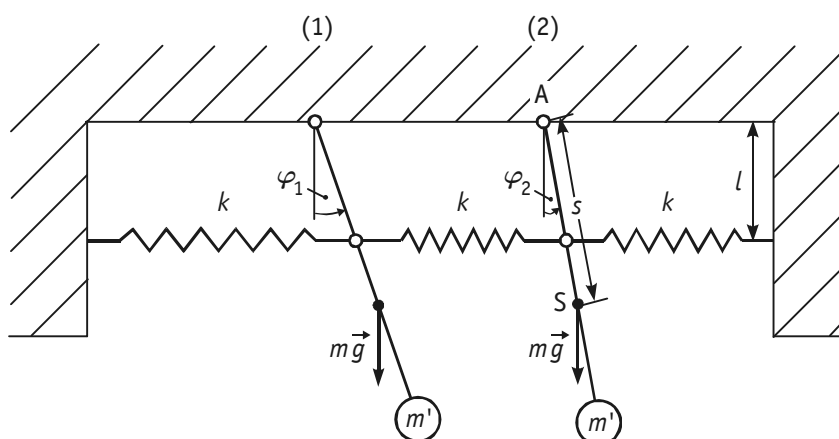


Bild 1 Gekoppelte Pendel

Die von beiden Federn auf das Pendel (1) ausgeübte Kraft ist bei kleinen Werten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  durch

$$F_1(\varphi_1, \varphi_2) = kl\varphi_1 + kl(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2-1)$$

gegeben. Entsprechend erhält man

$$F_2(\varphi_1, \varphi_2) = kl\varphi_2 - kl(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (2-2)$$

für das Pendel (2).

Jedes der Pendel ist ein starrer Körper, der um eine raum- und körperfeste Achse (A) rotiert. Die Bewegungsgleichungen im Falle kleiner Auslenkungen  $\varphi_1, \varphi_2$  lauten

$$J \ddot{\varphi}_1 = -mgs\varphi_1 - F_1(\varphi_1, \varphi_2)l \quad (2-3)$$

$$J \ddot{\varphi}_2 = -mgs\varphi_2 - F_2(\varphi_1, \varphi_2)l$$

und stellen ein System zweier gekoppelter Differentialgleichungen dar. Dabei bedeutet "gekoppelt", dass die beiden Variablen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  in beiden Gleichungen des Systems auftreten.

Man erhält aus (2-3)

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 - \gamma \varphi_2 = 0 \quad (2-4)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 - \gamma \varphi_1 = 0 \quad ,$$

wenn man die Abkürzungen

$$\omega_0^2 = \frac{1}{J} [mgs + 2kl^2] = \omega_{00}^2 + 2\gamma \quad (2-5)$$

benutzt.

In (2-4) und (2-5) bedeuten  $\gamma$  die Kopplungskonstante,  $\omega_{00}$  die Eigenfrequenz eines Pendels ohne Federn ( $k=0$ ) und  $\omega_0$  die Eigenfrequenz eines Pendels mit Federn bei Arretierung des anderen Pendels [z. B.  $\varphi_2(t) \equiv 0$  bei Schwingung des Pendels 1]. Zur Lösung des Differentialgleichungssystems (2-4) stellt man z. B. die erste Gleichung in (2-4) nach  $\varphi_2$  um und erhält

$$\varphi_2 = \frac{\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1}{\gamma} \quad \text{und} \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{\varphi_1^{(4)} + \omega_0^2 \ddot{\varphi}_1}{\gamma} \quad (2-6), (2-7)$$

Setzt man (2-6) und (2-7) in die zweite Gleichung von (2-4) ein, so erhält man mit

$$\varphi_1^{(4)} + 2\omega_0^2 \ddot{\varphi}_1 + (\omega_0^4 - \gamma^2) \varphi_1 = 0 \quad (2-8)$$

eine lineare homogene Differentialgleichung vierter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Sie wird mit dem Ansatz  $\varphi_1(t) = e^{\lambda t}$  gelöst. Ihre charakteristische Gleichung lautet

$$\lambda^4 + 2\omega_0^2 \lambda^2 + (\omega_0^4 - \gamma^2) = 0 \quad (2-9)$$

und besitzt die Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega_1 = \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \gamma} \quad \text{und} \quad \lambda_{3,4} = \pm j\omega_2 = \pm j\sqrt{\omega_0^2 + \gamma} \quad (2-10), (2-11)$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von (2-8)

$$\varphi_1(t) = C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) + C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t) \quad (2-12)$$

Mit (2-12) folgt  $\varphi_2(t)$  sofort aus (2-6) zu

$$\varphi_2(t) = C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) - C_3 \cos(\omega_2 t) - C_4 \sin(\omega_2 t) \quad (2-13)$$

### 3 Versuchsanordnung

Der Versuchsaufbau entspricht dem Bild 1. Die Federn können nach Bedarf aus- bzw. eingehängt werden. Am rechten Pendel können mittels Lichtschranke und Stoppuhr (PC) verschiedene Schwingungsdauern gemessen werden.

- Schwingung des Pendels ohne Federn  
Beide an dem betrachteten Pendel befestigten Federn werden ausgehängt.

$$\text{Schwingungsdauer: } T_{00}, \text{ Kreisfrequenz: } \omega_{00} = \sqrt{\frac{mgs}{J}} \quad (3-1)$$

- Schwingung des rechten Pendels mit Federn  
Das linke Pendel wird dabei arretiert.  
Schwingungsdauer:  $T_0$ , Kreisfrequenz:  $\omega_0$ .

Nach (2-5) gilt  $\gamma = \frac{\omega_0^2 - \omega_{00}^2}{2}$ . (3-2)

- Fundamentalschwingungen der gekoppelten Pendel.

Bei den sogenannten Fundamentalschwingungen schwingen beide Pendel entweder mit  $\omega_1$  oder mit  $\omega_2$  (Fundamentalfrequenzen) und dementsprechenden Schwingungsdauern  $T_1$  und  $T_2$ .

Man erreicht die Fundamentalschwingungen, indem man die Pendel mit gleicher Amplitude entweder gleichphasig oder gegenphasig startet und schwingen lässt. Bei gleicher Phase gilt  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ . Dies ist nach (2-12) und (2-13) nur für  $C_3 = C_4 = 0$  möglich und die Fundamentalschwingung erfolgt mit  $\omega_1$ .

Bei Gegenphase gilt  $\varphi_1(t) = -\varphi_2(t)$ . Dies ist nach (2-12) und (2-13) nur für  $C_1 = C_2 = 0$  möglich und die Fundamentalschwingung erfolgt mit  $\omega_2$ .

Aus den Fundamentalfrequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  kann die Kopplungskonstante nach (2-10) und (2-11) als

$$\gamma = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} \quad (3-3)$$

berechnet werden.

Bei schwacher Kopplung ( $\gamma \ll \omega_0^2$ ) stellt sich eine als Schwebung bezeichnete Schwingung der gekoppelten Pendel ein. Für die Frequenzen  $\omega_1$  und  $\omega_2$  gilt unter Verwendung der für kleine  $\varepsilon$  gültigen Näherung

$$\sqrt{1 \pm \varepsilon} \approx 1 \pm \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 - \frac{\gamma}{2\omega_0} \quad \text{und} \quad \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{\omega_0^2}} \approx \omega_0 + \frac{\gamma}{2\omega_0} . \quad (3-4)$$

Mit den Anfangsbedingungen  $\varphi_1(0) = \varphi_0$ ,  $\varphi_2(0) = 0$  und  $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$  z. B. folgt aus (2-12) und (2-13)

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{\gamma}{2\omega_0} t\right) \cos(\omega_0 t) \quad \text{und} \quad \varphi_2(t) = \varphi_0 \sin\left(\frac{\gamma}{2\omega_0} t\right) \sin(\omega_0 t) . \quad (3-5)$$

Beide Oszillatoren schwingen nach (3-5) mit der Frequenz  $\omega_0$ , ihre Amplituden sind mit der Schwebungsfrequenz  $\omega_S = \frac{\gamma}{2\omega_0}$  moduliert.

Die Schwebungsdauer  $T_S$  ist halb so groß wie die Periodendauer  $\bar{T}$  der Amplitudenmodulation. Es gilt also

$$2T_S = \bar{T} = \frac{2\pi}{\omega_S} = \frac{4\pi\omega_0}{\gamma} \quad \text{bzw.} \quad \gamma = \frac{2\pi\omega_0}{T_S} . \quad (3-6)$$

Bei der Schwebung wird die Ort-Zeit-Funktion des rechten Pendels über einen Messwandler von einem PC registriert, die Zeiten  $T_0$  und  $T_S$  werden aus der Graphik abgelesen.

#### 4 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt. Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

4.1 Man messe die Schwingungsdauer  $T_{00}$  und berechne  $\omega_{00}$  und  $J$  bei bekanntem  $m$  und  $s$ .

4.2 Für starke Kopplung messe man  $T_0$  und berechne  $\omega_0$ ,  $\gamma$  und die Federkonstante  $k = \frac{\gamma J}{l^2}$ .

4.3 Bei gleicher Kopplung wie in 4.2 messe man die Schwingungsdauern  $T_1$  und  $T_2$  der Fundamentalschwingungen und berechne  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  und erneut  $\gamma$ .

4.4 Bei schwacher Kopplung nehme man die Ort-Zeit-Funktion der Schwebung auf, bestimme daraus  $T_S$ ,  $T_0$ ,  $\omega_0$  und  $\gamma$  und überprüfe damit die Forderung  $\frac{\gamma}{\omega_0^2} \ll 1$  ..

## 5 Fragen

- 5.1 Geben Sie die Zusammenhänge zwischen Schwingungsdauer  $T$ , Frequenz  $f$  und Kreisfrequenz  $\omega$  einer Schwingung an.
- 5.2 Unter welcher Bedingung stellt sich eine Schwebung ein? Was ist unter der Schwebungsdauer  $T_S$  zu verstehen?
- 5.3 Eine harmonische Schwingung genügt der Bewegungsgleichung  $\ddot{\varphi} + \frac{mg s}{J_A} \varphi = 0$ . Wie groß sind ihre Kreisfrequenz und Schwingungsdauer?
- 5.4 Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems der Koppelpendel lautet:  
 $\varphi_{1,2} = C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t) \pm (C_3 \cos(\omega_2 t) + C_4 \sin(\omega_2 t))$ .  
Wie sind die Konstanten  $C_1$  bis  $C_4$  zu wählen, damit  
a) die gleichphasige Fundamentalschwingung (mit  $\omega_1$ ) bzw.  
b) die gegenphasige Fundamentalschwingung (mit  $\omega_2$ ) zustande kommt?
- 5.5 Wie ist das Massenträgheitsmoment eines starren Körpers bezüglich einer gegebenen Drehachse  $A$  definiert (mit Skizze)?
- 5.6 Zwei gleichartige Pendel werden im Abstand  $x$  von der Drehachse durch eine horizontale Feder (mit der Federkonstante  $k$ ) gekoppelt. Schreiben Sie (für den Fall kleiner Ausschläge  $\varphi_1, \varphi_2$ ) die Wechselwirkungskraft auf das Pendel 1 auf.
- 5.7 Leiten Sie für  $J = \frac{T_{00}^2 m g s}{4\pi^2}$  eine Fehlerformel her. Fehlerbehaftet sind  $T_{00}$ ,  $m$  und  $s$ .
- 5.8 Man stelle die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung  $\varphi_1^{(4)} + 2\omega_0^2 \ddot{\varphi}_1 + (\omega_0^4 - \gamma^2) \varphi_1 = 0$  auf und löse sie.
- 5.9 Leiten Sie für  $\gamma = \frac{(\omega_0^2 - \omega_{00}^2)}{2}$  eine Fehlerformel her. Fehlerbehaftet sind  $\omega_0$  und  $\omega_{00}$ .
- 5.10 Überführen Sie die beiden gekoppelten Differentialgleichungen  $\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 - \gamma \varphi_2 = 0$  und  $\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 - \gamma \varphi_1 = 0$  durch Addition bzw. Subtraktion in zwei entkoppelte Differentialgleichungen der Variablen  $q_+ = \varphi_1 + \varphi_2$  und  $q_- = \varphi_1 - \varphi_2$ .

## Literatur

- [ 1 ] Geschke, D. (Hrsg.) :      Physikalisches Praktikum  
   Teubner-Verlag, Leipzig, 2001  
   ISBN 3-519-10206-4
- [ 2 ] Hering, E. u. a. :          Physik für Ingenieure  
   Springer-Verlag, Berlin, 2004  
   ISBN 3-540-21036-9
- [ 3 ] Paus, H.-J. :                Physik in Experimenten und Beispielen  
   Verlag Carl Hanser, München, 2002  
   ISBN 3-446-22135-2