

## Versuchsanleitung W 8 : Ideales Gas. Wärmepumpe

### 1 Einleitung

In der Technik werden Gase in großem Umfang als Arbeitsstoffe in Kreisprozessen eingesetzt. Dampfkraftanlagen nutzen Wasserdampf, Verbrennungsmotoren und Gasturbinen arbeiten mit Luft-Kraftstoff-Gemischen. Wärmepumpen und Kältemaschinen werden meist mit Kältemitteln, wie z. B. halogenierten Kohlenwasserstoffen oder Ammoniak betrieben.

Kreisprozesse als thermodynamische Systeme können mit der phänomenologischen Thermodynamik quantitativ beschrieben werden. Dabei wird das System durch makroskopisch messbare Zustandsgrößen ( $p$ ,  $T$ ,  $V$ ) und durch abgeleitete Zustandsgrößen ( $U$ ,  $H$ ,  $S$ ) charakterisiert. Zwischen den Zustandsgrößen bestehen Zustandsgleichungen und Zustandsfunktionen, die Gleichgewichtszustände des Systems kennzeichnen.

In technischen Kreisprozessen können die gasförmigen Arbeitsstoffe als "ideales Gas" betrachtet werden und Teilprozesse durch spezielle Zustandsänderungen des idealen Gases angenähert werden. Auf dieser Grundlage kann man die Energieströme und den Nutzeffekt von Kreisprozessen berechnen. Der höchstmögliche Nutzeffekt wird mit dem CARNOTSchen Kreisprozess als einem idealisierten Prozess erhalten. Bei der technischen Realisierung von Kreisprozessen ergibt sich jedoch ein deutlich geringerer Nutzeffekt, da durch irreversible (nicht umkehrbare) Vorgänge, wie z. B. Reibung und Wärmeleitung, Energie verloren geht.

### 2 Grundlagen

#### **Ideales Gas**

Der Zustand eines Gases lässt sich mit den 3 Zustandsgrößen Volumen  $V$ , Druck  $p$  und Temperatur  $T$  charakterisieren. Dabei können diese Größen nicht unabhängig voneinander auftreten, sondern sie sind über Zustandsgleichungen miteinander verknüpft.

Eine einfache Zustandsgleichung ergibt sich für die Modells substanz "Ideales Gas". Darunter versteht man ein Gas mit folgenden Eigenschaften:

- zwischen den Molekülen bestehen keine Wechselwirkungskräfte (außer bei elastischen Stößen) und
- die Moleküle besitzen kein Eigenvolumen, d. h. die Teilchen werden als Punktmassen betrachtet.

Die Zustandsgleichung des idealen Gases lautet bei konstanter Gasmasse  $m$ :

$$\frac{p \cdot V}{T} = \text{konst.} \quad \text{oder bei Anwendung auf 2 Zustände:} \quad \frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} . \quad (2-1)$$

Wird der Normzustand mit  $p_0 = 101,3 \text{ kPa}$ ,  $T_0 = 273,15 \text{ K}$  und  $V_0 = \frac{m}{\rho_0}$  eingebracht, so folgt:

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot V_0}{T_0} \quad \text{bzw.} \quad \frac{p \cdot V}{T} = \frac{p_0 \cdot m}{T_0 \cdot \rho_0} . \quad (2-2)$$

Mit der spezifischen Gaskonstanten  $R_s = \frac{p_0}{T_0 \cdot \rho_0}$  ergibt sich die bekannteste Form der Allgemeinen Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$p \cdot V = m \cdot R_s \cdot T . \quad (2-3)$$

Für die Stoffmenge  $n = \frac{m}{M}$  kann man die Zustandsgleichung weiter umformen:

$$p \cdot V = n \cdot R_m \cdot T , \quad (2-4)$$

wobei  $R_m$  die molare oder universelle Gaskonstante  $R_m = 8,31441 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$  ist.

Die Zustandsgleichung lässt sich auch auf Zustandsänderungen anwenden, wenn diese gleichgewichtsnah und damit reversibel (umkehrbar) ablaufen. Von besonderem Interesse sind spezielle Zustandsänderungen, bei denen

jeweils eine Zustandsgröße konstant gehalten wird. Somit kann man isobare Zustandsänderungen ( $p = \text{konst.}$ ), isochore Zustandsänderungen ( $V = \text{konst.}$ ) und isotherme Zustandsänderungen ( $\vartheta = \text{konst.}$ ) betrachten. Wird bei einer isobaren Zustandsänderung das Gas um  $\Delta\vartheta$  auf  $T = T_0 + \Delta\vartheta$  erwärmt, so folgt aus der Zustandsgleichung (2-2) wegen  $p = \text{konst.}$ :

$$V = V_0 \cdot \frac{T}{T_0} = V_0 \cdot \frac{T_0 + \Delta\vartheta}{T_0} = V_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{T_0} \cdot \Delta\vartheta\right) .$$

Diese Gleichung entspricht dem experimentell gefundenen Volumengesetz von GAY-LUSSAC:

$$V = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\vartheta) \quad \text{für} \quad p = \text{konst.} \quad (2-5)$$

Der Volumenausdehnungskoeffizient  $\gamma$  ergibt sich für das ideale Gas zu:  $\gamma = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{273,15 \text{ K}} = 0,003661 \text{ K}^{-1}$ .

Erfolgt eine Erwärmung bei konstantem Volumen, so gilt entsprechend das Druckgesetz von GAY-LUSSAC:

$$p = p_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta\vartheta) \quad \text{für} \quad V = \text{konst.} \quad (2-6)$$

Hier wird der Koeffizient  $\gamma$  als Spannungskoeffizient bezeichnet. Dieser ist im Fall des idealen Gases gleich dem Volumenausdehnungskoeffizienten. Für eine isotherme Zustandsänderung ist das Gesetz von BOYLE-MARIOTTE gültig:

$$p \cdot V = p_0 \cdot V_0 \quad \text{für} \quad \vartheta = \text{konst.} \quad (2-7)$$

Bei Zustandsänderungen kann das Gas Volumenänderungsarbeit verrichten:

$$W = - \int p \cdot dV . \quad (2-8)$$

Die Vorzeichenregelung besagt: Expansionsarbeit  $W < 0$ , Kompressionsarbeit  $W > 0$ . Die Volumenänderungsarbeit lässt sich für die speziellen Zustandsänderungen einfach berechnen. Für eine isochore Zustandsänderung gilt:

$$W = 0 \quad \text{wegen} \quad dV = 0 .$$

Bei einer isobaren Zustandsänderung ( $dp = 0$ ) folgt:

$$W_{12} = -p \cdot (V_2 - V_1) .$$

Die Volumenänderungsarbeit bei isothermer Prozessführung ( $dT = 0$ ) ergibt zusammen mit der Zustandsgleichung (2-3) den folgenden Ausdruck

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} m \cdot R_s \cdot T \cdot \frac{dV}{V} = -m \cdot R_s \cdot T \cdot \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right) .$$

Die Volumenänderungsarbeit hängt somit von der Art der Prozessführung (z. B. isochor oder isobar) ab und stellt deshalb eine Prozessgröße dar.

Die einem Gas zu- oder abgeführte Wärme ist ebenfalls eine Prozessgröße. Bei isobarer Zustandsänderung berechnet sich die mit dem Gas ausgetauschte Wärme zu

$$Q_{12} = c_p \cdot m \cdot (T_2 - T_1) , \quad (2-9)$$

wobei  $c_p$  die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck ist. Wird die Wärme bei isochorer Zustandsänderung ausgetauscht, so gilt

$$Q_{12} = c_v \cdot m \cdot (T_2 - T_1) \quad (2-10)$$

mit  $c_v$  als der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen.

Dabei gelten die Beziehungen:  $c_p > c_v$  und  $c_p - c_v = R_s$ .

Die Energiebilanz des idealen Gases beschreibt der Erste Hauptsatz der Thermodynamik (Satz von der Erhaltung der Energie). Für nichtabgeschlossene Systeme ergibt sich die folgende quantitative Aussage.

In einem nichtabgeschlossenen System ist die Änderung der inneren Energie gleich der Summe aus übertragener Wärme und mechanischer Arbeit. Es gilt:

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - p \cdot dV \quad (\text{differentielle Form})$$

$$\Delta U = Q_{12} + W_{12} = \int_1^2 \delta Q - \int_1^2 p \cdot dV \quad (\text{integrale Form}) . \quad (2-11)$$

Die Gesetze für das ideale Gas gelten näherungsweise auch für reale Gase. Die Gleichungen werden dabei vom realen Gas umso besser erfüllt, je niedriger der Druck und je höher die Temperatur ist. Je verdünnter also das reale Gas vorliegt, umso eher kann es die oben genannten Eigenschaften des idealen Gases annehmen.

## Wärmepumpe

In vielen technischen Anwendungen werden Kreisprozesse genutzt, d. h. Zustandsänderungen, die vom Zustand 1 ausgehen und nach einem "Weg" zum Anfangszustand zurückgeführt werden. Dadurch sind sich wiederholende, also periodische Vorgänge möglich, wie sie in Maschinen ablaufen. Da nach einem vollständigen Umlauf die innere Energie als Zustandsgröße wieder den gleichen Wert annimmt, d.h.  $\Delta U = 0$ , folgt aus dem 1. Hauptsatz

$$\Delta U = 0 = - \oint \delta Q + \oint \delta W \quad \text{bzw.} \quad W = -Q \quad (2-12)$$

Somit ist während eines Umlaufs die mechanische Arbeit gleich der ausgetauschten Wärme.

Eine Unterteilung der Maschinen erfolgt nach dem Umlaufsinn des Kreisprozesses im  $p$ - $V$ -Diagramm. Bei einem rechtsläufigen Kreisprozess werden die Zustandsänderungen im  $p$ - $V$ -Diagramm im Uhrzeigersinn durchlaufen. Bei jedem Umlauf wird Nutzarbeit  $W > 0$  gewonnen. Maschinen, in denen ein rechtsläufiger Kreisprozess vor sich geht, heißen Wärmekraftmaschinen. Ein linksläufiger Kreisprozess liegt vor, wenn die Zustandsänderungen im  $p$ - $V$ -Diagramm entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Maschinen mit linksläufigem Kreisprozess werden als Arbeitsmaschinen bezeichnet. Nach der Art der genutzten Wärmeenergie unterscheidet man zwischen Wärmepumpe und Kältemaschine.

Beim linksläufigen Kreisprozess wird dem Gas hoher Temperatur eine größere Kompressionsarbeit von außen zugeführt als das Gas Arbeit in der Expansionsphase nach außen abgibt. Während eines vollständigen Umlaufs muss somit mechanische Arbeit  $W > 0$  von außen zugeführt werden. Diese Antriebsenergie ermöglicht zusammen mit der zugeführten Wärme niedriger Temperatur, dass Wärme hoher Temperatur abgegeben wird. Die Bilanzgleichung ergibt sich aus dem 1. Hauptsatz:

$$|Q_{ab}| = Q_{zu} + W \quad .$$

In dem Energieflußschema (Bild 1) sind die Energieströme für den linksläufigen CARNOTSchen Kreisprozess [1] dargestellt. Der CARNOT-Maschine wird Wärme (aus einem Wärmebehälter niedriger Temperatur  $T_1$ ) und mechanische Arbeit zugeführt. Beide Energieströme werden als Wärme höherer Temperatur  $T_3$  an einen zweiten Wärmebehälter (höherer Temperatur) abgegeben.

Bei einer Wärmepumpe ist der gewünschte Nutzen die bei hoher Temperatur abgegebene Wärme  $Q_{ab}$  bzw. die Heizleistung. Der Aufwand besteht in der zugeführten Arbeit  $W$  bzw. der elektrischen Antriebsleistung  $P$ . Der Nutzeffekt der Wärmepumpe, also das Verhältnis von Nutzen zu Aufwand, wird als Leistungsverhältnis oder Leistungszahl  $\varepsilon_W$  definiert:

$$\varepsilon_W = \frac{|Q_{ab}|}{W} = \frac{\dot{Q}_{ab}}{P} \quad (2-13)$$

Speziell für eine CARNOTSche Wärmepumpe berechnet sich das Leistungsverhältnis zu

$$\varepsilon_{W,C} = \frac{T_3}{T_3 - T_1} \quad (2-14)$$

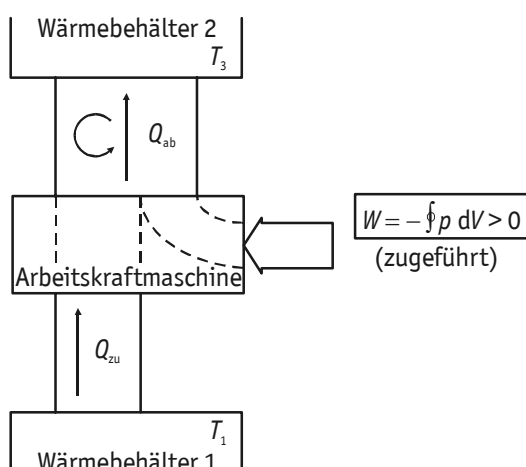


Bild 1 Energieflußschema eines linksläufigen CARNOT-Prozesses

Damit ergibt sich für das Leistungsverhältnis stets ein Wert  $> 1$ . Für eine reale Wärmepumpe wird ein deutlich kleineres Leistungsverhältnis  $\varepsilon$  erzielt, das sich mit der CARNOTSchen Leistungszahl darstellen lässt:

$$\varepsilon_W = \nu \cdot \varepsilon_{W,C} = \nu \cdot \frac{T_3}{T_3 - T_1} \quad (2-15)$$

Hierbei ist  $\nu$  der Gütegrad des realen Wärmepumpen-Prozesses.

Wenn der Nutzen in der entzogenen Wärme bei niedriger Temperatur bzw. in der Kälteleistung  $\dot{Q}_{zu}$  besteht, so bezeichnet man diese Arbeitsmaschine als Kältemaschine. Das Leistungsverhältnis ergibt sich folglich zu

$$\varepsilon_K = \frac{Q_{zu}}{W} = \frac{\dot{Q}_{zu}}{P} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{K,C} = \frac{T_1}{T_3 - T_1} \quad \text{bei einer CARNOT-Maschine.} \quad (2-16)$$

Betrachtet man den rechtsläufigen Kreisprozess, so kehren sich die Energieströme in Bild 1 um. Dann wird Wärme hoher Temperatur zu einem Teil in Nutzarbeit umgewandelt, während der andere Teil als Wärme niedriger Temperatur abgegeben wird. Die Bilanzgleichung nach dem 1. Hauptsatz lautet

$$|W| = Q_{zu} - |Q_{ab}|$$

und der Nutzeffekt der Wärmekraftmaschine wird mit dem Wirkungsgrad  $\eta$  beschrieben:

$$\eta = -\frac{W}{Q_{zu}} \quad \text{bzw.} \quad \eta_C = \frac{T_3 - T_1}{T_3} \quad \text{beim CARNOT-Prozess.} \quad (2-17)$$

In der technischen Anwendung sind Wärmepumpen und Kältemaschinen nach dem Kompressionsprinzip weit entwickelt und werden in großem Umfang eingesetzt. Kompressionswärmepumpen sind insbesondere Bestandteil von Heizungsanlagen zur Gebäudeheizung. Kompressionskältemaschinen wurden von LINDE zum wichtigsten Verfahren der Kälteerzeugung bis zur wissenschaftlich-technischen Vollkommenheit entwickelt. Anwendungen sind Haushalt- und Gewerbekühlschränke sowie Klimageräte.

Bild 2 zeigt den prinzipiellen Aufbau einer Wärmepumpe bzw. Kältemaschine nach dem Kompressionsprinzip. Im Verdampfer befindet sich das flüssige Kältemittel bei niedrigem Druck und geringer Temperatur. Bei der Verdampfung wird die erforderliche Verdampfungswärme dem Wärmebehälter 1 entzogen, so dass sich dieser abkühlt (Abnahme von  $\vartheta_K$ ). Das verdampfte Kältemittel wird vom Verdichter (Kompressor) angesaugt und auf einen hohen Druck komprimiert. Durch die Kompression erhöht sich die Temperatur des Kältemitteldampfes. Der heiße Dampf gelangt nun in den Kondensator. Da die Temperatur des Dampfes höher ist als die Temperatur des Wärmebehälters 2, kommt es zur Kondensation des Dampfes. Die frei gewordene Kondensationswärme wird an den Wärmebehälter 2 abgegeben und folglich erhöht sich dessen Temperatur  $\vartheta_W$ . Der Dampf von hohem Druck wird anschließend im Drosselventil (Expansionsventil) auf niedrigen Druck entspannt, so dass ein kleiner Teil der Flüssigkeit verdampft. Die erforderliche Verdampfungswärme wird dem noch flüssigen Teil entzogen, wodurch sich das Kältemittel deutlich abkühlt. Beim Eintritt in den Verdampfer werden Anfangsdruck und -temperatur wieder erreicht und der nächste Umlauf kann beginnen.

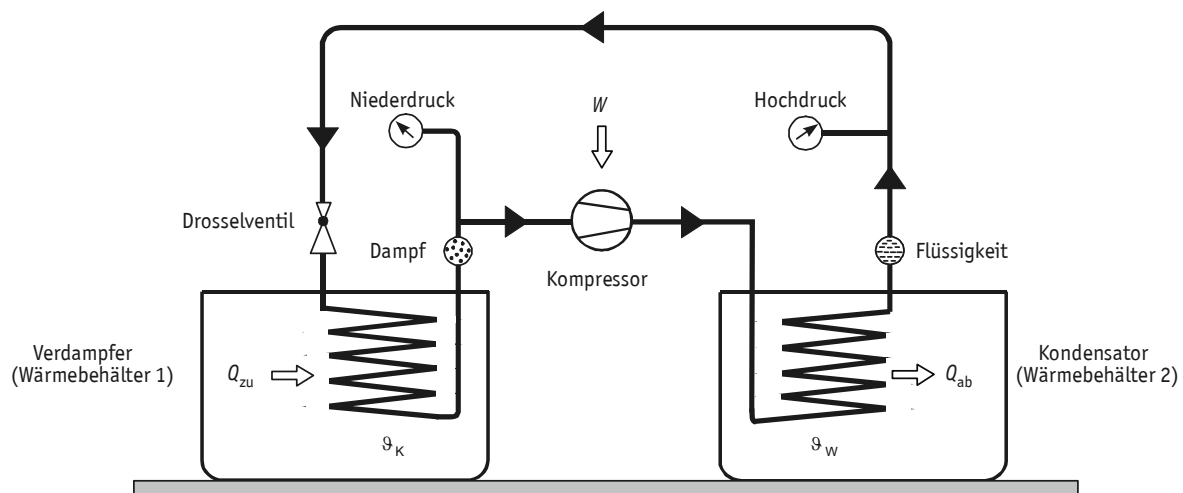


Bild 2 Schematische Darstellung einer Kompressionswärmepumpe bzw. -Kältemaschine

### 3 Versuchsanordnung

#### ***pVT*-Gerät**

Ein Behälter aus Aluminium mit dem Volumen  $V_1 = 1000 \text{ cm}^3$  ist über ein Ventil an ein U-Rohr-Manometer angeschlossen. Ein U-Rohr-Schenkel lässt sich heben und senken, darüber hinaus kann Manometerflüssigkeit abgelassen oder zugegossen werden. Mit der im Behälter eingeschlossenen Luftmenge können Druckänderungen  $\Delta p$  bei konstantem Volumen und Volumenänderungen  $\Delta V$  bei konstantem Druck durchgeführt und mittels geeicher Skalen gemessen werden.

Der Behälter wird mit einem Thermostatbad auf die gewünschte Temperatur erwärmt.

Die Messung des Luftdrucks erfolgt mit einem Barometer.

#### **Wärmepumpe**

Die elektrische Kompressionswärmepumpe ist in Bild 2 schematisch dargestellt. Als Arbeitsstoff dient Difluor-Dichlor-Methan  $\text{CF}_2\text{Cl}_2$ , das zur Gruppe der Fluorkohlenwasserstoffe (FCKW) gehört. Die Motorleistung des Kompressors wird mit einem Wattmeter gemessen. Die Wärmetauscher (Verdampfer und Kondensator) sind aus vernickelten Kupferrohrspiralen gefertigt und tauchen in isolierte Wasserbehälter. Die Wassertemperatur in den Behältern wird mit Temperaturfühlern digital angezeigt. Eingebaute Manometer zeigen den Druck auf der Hoch- und der Niederdruckseite an. Die Schaugläser, die nach dem Verdampfer bzw. nach dem Kondensator eingebaut sind, lassen den jeweils überwiegenden Aggregatzustand (Dampf bzw. Flüssigkeit) erkennen.

### 4 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt.

Genaue Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

- 4.1 Ausgehend vom Zustand 1 ( $p_1, V_1, T_1$ ) einer gegebenen Luftmenge ist je eine isochore, isobare und isotherme Zustandsänderung vorzunehmen und im  $p$ - $V$ -Diagramm darzustellen.
- 4.2 Aus den gemessenen 3 Zuständen sind folgende Auswertungen durchzuführen: Bestätigung der Zustandsgleichung des idealen Gases  $\frac{p \cdot V}{T} = \text{konst.}$  sowie des BOYLE-MARIOTTESchen Gesetzes und der GAY-LUSSACSchen Gesetze, Berechnung der Masse der im Experiment verwendeten Luft sowie des Volumenkoeffizienten und des Spannungskoeffizienten.
- 4.3 Die Volumenänderungsarbeit ist für die betrachtete isochore, isobare und isotherme Zustandsänderung zu ermitteln.
- 4.4 Für die isobare Zustandsänderung ist durch gesonderte Berechnung von  $Q$ ,  $W$  und  $\Delta U$  der 1. Hauptsatz der Thermodynamik zu bestätigen.
- 4.5 Während des instationären Betriebs einer Wärmepumpe sind die Temperaturen im Verdampfer und im Kondensator in bestimmten Zeitabständen zu messen.
- 4.6 Das Leistungsverhältnis der Wärmepumpe ist in Abhängigkeit von der Zeit zu berechnen und grafisch darzustellen und mit dem Leistungsverhältnis einer CARNOTSchen Wärmepumpe (bei den gleichen Temperaturen) zu vergleichen.

### 5 Fragen

- 5.1 Geben Sie die Zustandsgleichung für das ideale Gas bei gegebener Masse bzw. Stoffmenge an und benennen Sie die verwendeten Symbole.
- 5.2 Geben Sie die Zustandsgleichung des idealen Gases für zwei Zustände, nämlich einen beliebigen Zustand und den Normzustand, an und berechnen Sie die molare Gaskonstante.  
 $p_0 = 101,3 \text{ kPa} \quad T_0 = 273,15 \text{ K} \quad V_{0m} = 22,4 \text{ l} \cdot \text{mol}^{-1}$  ( $V_{0m}$  - Molvolumen bei Normbedingungen)
- 5.3 Helium ( $m = 14 \text{ g}$ ) wird isobar vom Zustand 1 ( $V_1 = 30 \text{ l}$ ,  $\vartheta_1 = 25^\circ \text{C}$ ) auf das Volumen  $V_2 = 80 \text{ l}$  expandiert. Berechnen Sie den Druck und die verrichtete Volumenänderungsarbeit. ( $M = 4 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ )
- 5.4 Sauerstoff ( $M = 32 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ ) wird isotherm vom Zustand 1 ( $V_1 = 5 \text{ m}^3$ ,  $p_1 = 188 \text{ Pa}$ ) zum Zustand 2 ( $V_2 = 3 \text{ m}^3$ ) komprimiert. Wie groß sind der Druck  $p_2$  und die Kompressionsarbeit? Stellen Sie die Kompressionsarbeit im  $p$ - $V$ -Diagramm dar.

- 5.5 Stickstoff ( $M = 28 \text{ kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$ ) nimmt bei  $\vartheta_1 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$  und  $p_1 = 4000 \text{ Pa}$  das Volumen von  $V_2 = 80 \text{ l}$  ein. Berechnen Sie die Masse des Stickstoffs. Welcher Druck stellt sich ein, wenn das Gas isochor um  $60 \text{ K}$  erwärmt wird?
- 5.6 Formulieren Sie den 1. Hauptsatz der Thermodynamik. Geben Sie dabei die Berechnungsformeln für  $\Delta U$ ,  $Q$  und  $W$  bei einer Zustandsänderung von 1 nach 2 an. Wie lautet der 1. Hauptsatz für Kreisprozesse?
- 5.7 Skizzieren Sie das Energieflußschema eines linksläufigen CARNOTSchen Kreisprozesses und ermitteln Sie daraus das Leistungsverhältnis der Wärmepumpe sowie der Kältemaschine.
- 5.8 Eine CARNOTSche Wärmepumpe arbeitet zwischen den Temperaturen  $\vartheta_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  und  $\vartheta_2 = 60 \text{ }^\circ\text{C}$ . Berechnen Sie das Leistungsverhältnis  $\varepsilon_{W,C}$  und vergleichen Sie dieses mit dem Leistungsverhältnis einer realen Wärmepumpe, die zwischen den gleichen Temperaturen arbeitet und den Gütegrad  $\nu = 0,35$  aufweist.
- 5.9 Eine CARNOTSche Kältemaschine arbeitet zwischen zwei Wärmebehältern der Temperaturen  $\vartheta_1 = -10 \text{ }^\circ\text{C}$  und  $\vartheta_2 = 45 \text{ }^\circ\text{C}$ . Die Antriebsleistung beträgt  $P = 1,2 \text{ kW}$ . Wie groß ist die Kälteleistung?
- 5.10 Skizzieren Sie die Energieströme in einem rechtsläufigen CARNOTSchen Kreisprozess und geben Sie den Wirkungsgrad an.

## Literatur

- [ 1 ] Hering, E. u. a. :      Physik für Ingenieure  
                                  Springer-Verlag, Berlin, 2004  
                                  ISBN 3-540-21036-9