

Versuchsanleitung S 7 : Federpendel

1 Einleitung

Die Rotation eines starren Körpers um eine raum- und körperfeste Drehachse A verdient wegen ihrer zahlreichen technischen Anwendungen (Motoranker, Räder, Schwungmassen, Wellen ...) besonderes Interesse.

Die Drehwinkel-Zeit-Funktion $\varphi(t)$ - und damit der Bewegungsablauf - wird bei o. g. Rotation bestimmt durch:

- J_A : das Massenträgheitsmoment des starren Körpers bezüglich der Achse A
- M_A : das Drehmoment bezüglich der Achse A

und die Anfangsbedingungen $\varphi(t=0)$ und $\dot{\varphi}(t=0)$.

Der Größe M_A gilt das besondere Anliegen des Versuches.

An einem ausgewählten starren Körper - einem Federpendel - wird der Einfluss mehrerer Kräfte und des von ihnen bewirkten M_A auf den Bewegungsablauf untersucht.

Das Federpendel vollführt dabei eine periodische Bewegung. Durch die Messung der Schwingungsdauer T lässt sich an dieser der Zeitablauf leichter erfassen als bei anderen, nichtperiodischen Rotationsbewegungen.

2 Grundlagen

Der starre Körper sei um eine feste Achse A drehbar gelagert und besitze bezüglich dieser das Massenträgheitsmoment J_A . Ein Einheitsvektor \vec{e}_A gibt die Achsenrichtung an, er bildet mit dem positiven Zählssinn des Drehwinkels φ eine Rechtsschraube. An dem starren Körper können beliebig viele Drehmomente \vec{M}_i angreifen, ihre Summe

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i \quad (2-1)$$

nennt man das (resultierende) Drehmoment.

Für die Rotation um A ist \vec{M} nur mit M_A - seiner Koordinate in Achsenrichtung - wirksam. Man erhält sie durch die Projektion von \vec{M} auf \vec{e}_A als

$$M_A = \vec{M} \cdot \vec{e}_A = \left(\sum_i \vec{M}_i \right) \cdot \vec{e}_A = \sum_i (\vec{M}_i \cdot \vec{e}_A) \quad (2-2)$$

Die Koordinate (bzw. das Skalarprodukt) M_A ist eine vorzeichenbehaftete skalare Größe - also weder ein Vektor noch der Betrag eines solchen.

In der Bewegungsgleichung der Rotation um die feste Achse

$$J_A \ddot{\varphi} = M_A(\varphi, \dot{\varphi}, t) \quad (2-3)$$

kann M_A vom Winkel φ , der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ und auch explizit von der Zeit t abhängen.

Die Gleichung (2-3) ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\varphi(t)$. Löst man sie mit geeigneten mathematischen Methoden, so liegt mit $\varphi(t)$ die vollständige Beschreibung des Bewegungsablaufes vor.

Gegebenenfalls zu \vec{e}_A senkrechte Komponenten von \vec{M} tragen zur Bewegung um A nichts bei. Sie belasten die Achslager und werden durch Zwangs- oder Stützmomente kompensiert.

3 Versuchsanordnung

Das Federpendel besteht aus einem Stab der Masse m' , an dessen unterem Ende ein Zylinder der Masse m'' angebracht ist (vgl. Bild 1).

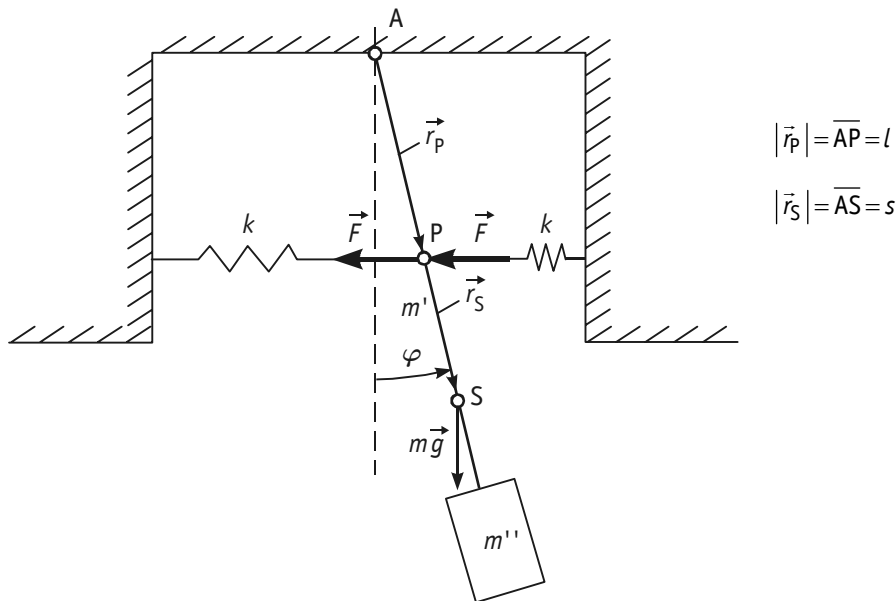


Bild 1 Federpendel

Der Schwerpunkt S der Gesamtmasse $m = m' + m''$ liegt am Ort \vec{r}_S im Abstand s von der Drehachse A . Das obere Ende des Stabes ist an einem Rahmen so gelagert, dass sich das Federpendel um A drehen kann. Im Punkt P am Ort \vec{r}_P - dessen Abstand l zu A variiert werden kann - greifen zwei Federn der Federkonstanten k an. Neben der Gewichtskraft $m\vec{g}$ wirken die beiden gleichgroßen Federkräfte \vec{F} sowie Luft- und Lagerreibungskräfte auf das Pendel ein. Diese Kräfte liegen alle in der Zeichenebene. Der Einheitsvektor \vec{e}_A steht auf der Zeichenebene senkrecht und weist zum Betrachter.

Bei einer Auslenkung des Pendels um φ (vgl. Bild 1) bewirkt die Gewichtskraft das Moment

$$\vec{M}_G = \vec{r}_S \times m\vec{g} = -\vec{e}_A s m g \sin\varphi \quad (3-1)$$

Hält man die Ausschläge klein, kann in (3-1) die Sinusfunktion durch ihr Argument φ genähert werden und es folgt

$$\vec{M}_G = -\vec{e}_A m g s \varphi \quad (3-2)$$

Bei den erwähnten kleinen Ausschlägen des Pendels kann die Bewegung des Punktes P näherungsweise als horizontal und geradlinig angesehen werden.

Die linke Feder wird so um $l\varphi$ gedehnt und die rechte um $l\varphi$ zusammengedrückt. Das von beiden Federn gemeinsam bewirkte Moment ist

$$\vec{M}_F = \vec{r}_P \times 2\vec{F} = -\vec{e}_A l 2k (l\varphi) = -\vec{e}_A 2k l^2 \varphi \quad (3-3)$$

Für das Reibungsmoment wird summarisch der Ansatz

$$\vec{M}_R = -\vec{e}_A R \dot{\varphi} \quad (3-4)$$

gemacht. Es wirkt stets bewegungshemmend und ist dem Betrage nach mit dem Faktor R (näherungsweise) dem Betrag der Winkelgeschwindigkeit proportional.

Durch Projektion des resultierenden Momentes $\vec{M} = \vec{M}_G + \vec{M}_F + \vec{M}_R$ auf die Achsenrichtung erhält man mit (3-2) bis (3-4)

$$M_A = \vec{M} \vec{e}_A = -\left(m g s + 2 k l^2\right) \varphi - R \dot{\varphi} \quad (3-5)$$

Die Bewegungsgleichung (2-2) wird damit zu

$$\ddot{\varphi} + \frac{R}{J_A} \dot{\varphi} + \frac{m g s + 2 k l^2}{J_A} \varphi = \ddot{\varphi} + 2 \delta \dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad (3-6)$$

und besitzt - wie man durch Einsetzen überprüfen kann - die Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha) \quad (3-7)$$

Das ist die Winkel-Zeit-Funktion einer gedämpften Drehschwingung mit der Amplitude φ_0 und dem Nullphasenwinkel α , der Abklingkonstanten $\delta = \frac{R}{2J_A}$ und der Kreisfrequenz ω .

Es gilt dabei

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \quad (3-8)$$

Ist die Dämpfung schwach ($\delta^2 \ll \omega^2$), so gilt annähernd

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 = \frac{m g s + 2 k l^2}{J_A} \quad (3-9)$$

Misst man nun die Schwingungsdauer T des Federpendels in Abhängigkeit von l und stellt $\frac{1}{T^2}$ als Funktion von l^2 dar, so erhält man wegen (3-9) die Gerade

$$\frac{1}{T^2} = \frac{m g s}{4 \pi^2 J_A} + \frac{k}{2 \pi^2 J_A} l^2 \quad (3-10)$$

aus deren Anstieg und Absolutglied man z. B. bei bekanntem m und J_A die Federkonstante k und den Schwerpunktabstand s bestimmen kann.

Um die Abklingkonstante δ zu bestimmen, zeichnet man z. B. die Funktion $\varphi(t)$ oder die (bei kleinen Ausschlägen) dazu proportionale Horizontalauslenkung $y(t)$ des Pendels auf. Dabei müssen nach (3-7) die aufeinanderfolgenden Maximalauslenkungen auf der einhüllenden Exponentialfunktion $e^{-\delta t}$ liegen. Eine an $y(t)$ mit dem Computer durchgeführte Kurvenanpassung für die einhüllenden Exponentialfunktion liefert die Parameter dieser Funktion aus denen dann die Abklingkonstante δ berechnet werden kann.

Mit dem so bestimmten δ -Wert kann die Gültigkeit der Näherungsformel (3-9) im Experiment nachgewiesen werden.

4 Aufgaben

In diesem Abschnitt werden die zu bearbeitenden Aufgaben nur grundsätzlich aufgeführt. Genauere Hinweise zur Versuchsdurchführung befinden sich am Arbeitsplatz.

- 4.1 Man messe für verschiedene Federangriffspunkte P die Schwingungsdauern des Federpendels.
- 4.2 Aus der graphischen Darstellung $\frac{1}{T^2} = f(l^2)$ bestimme man bei gegebenen J_A und m die Federkonstante k und den Schwerpunktabstand s .
- 4.3 Man zeichne mittels eines Bewegungsaufnehmers die Zeitfunktion $y(t)$ auf und schätze daraus die Abklingkonstante δ ab. Das Pendel dabei ohne Federn schwingen lassen.
- 4.4 Man zeige, dass δ^2 vernachlässigbar klein gegen ω^2 ist.

5 Fragen

- 5.1 Geben Sie die Definitionsgleichung des Massenträgheitsmomentes J_A bezüglich der festen Achse A an (mit Skizze).
- 5.2 Eine Kraft \vec{F} greift im Punkte P (Ortsvektor \vec{r}_P) an. Schreiben Sie den Drehmomentenvektor der Kraft \vec{F} bezüglich eines Drehpunktes D (Ortsvektor \vec{r}_D) auf und fertigen Sie dazu eine Skizze an.
- 5.3 Welche Beziehungen bestehen zwischen der Schwingungsdauer, der Frequenz und der Kreisfrequenz einer Schwingung?
- 5.4 Die Bewegungsgleichung des ungedämpften Federpendels lautet $\ddot{\varphi} + \frac{m g s + 2 k l^2}{J_A} \varphi = 0$.
Geben Sie seine Frequenz f an.
- 5.5 Wie lautet das dynamische Grundgesetz für die Rotation des starren Körpers um eine feste Achse A (mit Skizze)?
- 5.6 Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ ist.
- 5.7 Erläutern Sie den Begriff "raum- und körperfeste Achse".
- 5.8 Leiten Sie für $s = \frac{a_0 J_A 4\pi^2}{m g}$ eine Fehlerformel her, wenn a_0 , J_A , m und g fehlerbehaftet sind.
- 5.9 Geben Sie drei Maßeinheiten für das Drehmoment an. Welche anderen physikalischen Größen werden auch in diesen Einheiten gemessen?
- 5.10 Welchen relativen Fehler begeht man durch die Näherung $\sin \varphi \approx \varphi$ für $\varphi = 5^\circ$?

Literatur

- [1] Geschke, D. (Hrsg.) : Physikalisches Praktikum
 Teubner-Verlag, Leipzig, 2001
 ISBN 3-519-10206-4
- [2] Hering, E. u.a. : Physik für Ingenieure
 Springer-Verlag, Berlin, 2004
 ISBN 3-540-21036-9